“十三五”职业教育国家规划教材

微课版

建筑力学

第三版

新世纪高等职业教育教材编审委员会 组编
主　编　张玉敏　伊爱焦

- “互联网 +”助力教学改革
- 移动在线自测，随学随测
- 课件、微课和习题详解等配套资源丰富

大连理工大学出版社

目 录

$$M(x_1)=F_{Ay}x_1=\frac{Fb}{l}x_1 \quad (0 \leqslant x_1 \leqslant a)$$

CB 段

$$F_S(x_2)=F_{Ay}-F=\frac{Fb}{l}-F=-\frac{Fa}{l} \quad (a<x_2<l)$$

$$M(x_2)=F_{Ay}x_2-F(x_2-a)=\frac{Fb}{l}x_2-F(x_2-a) \quad (a \leqslant x_2 \leqslant l)$$

(3) 画剪力图和弯矩图

由 *AC* 段的剪力方程可知，*AC* 段的剪力为正值常数 Fb/l，剪力图是一条在 x 轴上方的水平直线；由 *CB* 段的剪力方程可知，*CB* 段的剪力为负值常数 $-Fa/l$，剪力图是一条在 x 轴下方的水平直线。梁的剪力图如图 6-23(b) 所示。

AC 段和 *CB* 段的弯矩方程 $M(x)$ 均为 x 的一次函数，故两段梁的弯矩图均为斜直线。每段分别计算出两端截面的 M 值后可作出弯矩图。计算如下：

当 $x_1=0$ 时　　$M_A=0$

当 $x_1=a$ 时　　$M_C=\frac{Fb}{l}x_1=\frac{Fab}{l}$

当 $x_2=a$ 时　　$M_C=\frac{Fb}{l}x_2-F(x_2-a)=\frac{Fb}{l}a-F(a-a)=\frac{Fab}{l}$

当 $x_2=l$ 时　　$M_B=\frac{Fb}{l}x_2-F(x_2-a)=\frac{Fb}{l}l-F(l-a)=0$

梁的弯矩图如图 6-23(c) 所示。

由剪力图和弯矩图可以看出，在集中力 F 作用的 C 处，左截面剪力 Fb/l，右截面剪力 $-Fa/l$，剪力图发生突变，突变的方向是从左到右与集中力的指向一致，突变值等于集中力 F；弯矩图出现尖点，即弯矩图在截面 C 处发生转折。

6.6 利用微分关系作梁的内力图

1. 剪力 $F_S(x)$、弯矩 $M(x)$ 与分布荷载集度 $q(x)$ 间的微分关系

如图 6-24(a) 所示的简支梁受集度为 $q(x)$ 的分布荷载作用，$q(x)$ 以向上为正。从梁中横坐标 x 处取一微段梁 $\mathrm{d}x$。因为是微段，所以其上的分布荷载可视为均布荷载，如图 6-24(b) 所示。假设 $\mathrm{d}x$ 微段梁只作用均布荷载 $q(x)$，无集中力和集中力偶。当 x 有增量 $\mathrm{d}x$ 时，其右侧剪力、弯矩的微小增量分别为 $\mathrm{d}F_S(x)$、$\mathrm{d}M(x)$。因此，$\mathrm{d}x$ 微段梁右侧的剪力、弯矩分别为 $F_S(x)+\mathrm{d}F_S(x)$、$M(x)+\mathrm{d}M(x)$。由平衡方程

$$\sum F_y=0,\quad F_S(x)+q(x)\mathrm{d}x-[F_S(x)+\mathrm{d}F_S(x)]=0 \tag{a}$$

$$\sum M_C=0,\quad -M(x)-F_S(x)\mathrm{d}x-q(x)\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}x}{2}+[M(x)+\mathrm{d}M(x)]=0 \tag{b}$$

由(a)式整理后可得

$$\frac{\mathrm{d}F_S(x)}{\mathrm{d}x}=q(x) \tag{6-1}$$

式(6-1)表明，梁上任一横截面上的剪力对 x 的一阶导数等于作用在该截面处的分布荷载集度。这一微分关系的几何意义是剪力图上某点切线的斜率等于该点对应截面处的分布荷载集度。

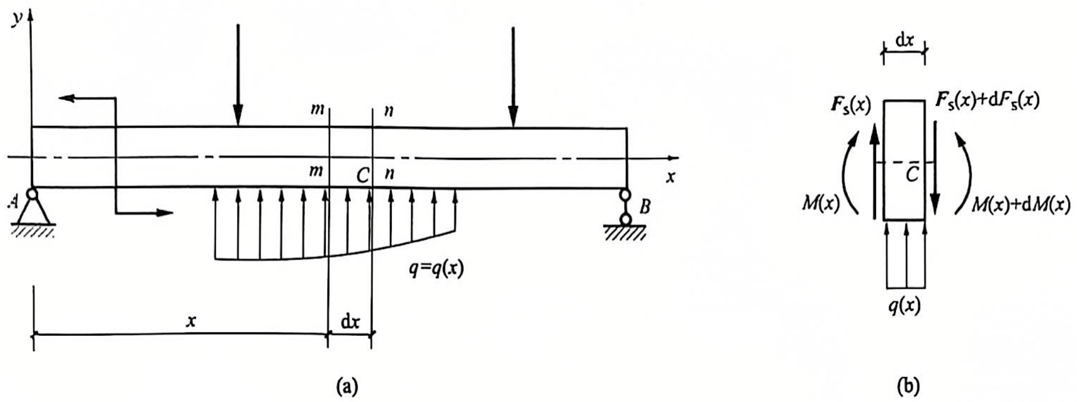


图 6-24　剪力、弯矩与分布荷载集度间的微分关系

由(b)式略去高阶微量 $\mathrm{d}x\,\dfrac{\mathrm{d}x}{2}$，整理后可得

$$\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=F_S(x) \tag{6-2}$$

式(6-2)表明：梁上任一横截面上的弯矩对 x 的一阶导数等于该截面上的剪力。这一微分关系的几何意义是：弯矩图上某点切线的斜率等于该点对应截面上的剪力。

将式(6-2)两边求导整理后可得

$$\frac{\mathrm{d}^2M(x)}{\mathrm{d}x^2}=q(x) \tag{6-3}$$

式(6-3)表明，梁上任一横截面上的弯矩对 x 的二阶导数等于该截面处的分布荷载集度。这一微分关系的几何意义是：弯矩图上某点的曲率等于该点对应截面处的分布荷载集度。可见，由分布荷载集度的正负可以确定弯矩图的凹凸方向。

2. 用剪力、弯矩与分布荷载集度间的微分关系作剪力图和弯矩图

根据剪力 $F_S(x)$、弯矩 $M(x)$ 与分布荷载集度 $q(x)$ 之间的微分关系及几何意义，即可得出关于剪力图与弯矩图的变化规律。

(1) 梁上无分布荷载作用的区段

由 $q(x)=0$，即 $\dfrac{\mathrm{d}F_S(x)}{\mathrm{d}x}=q(x)=0$ 可知，$F_S(x)=$ 常数，故该段剪力图为一条平行于 x 轴的直线。又由 $\dfrac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=F_S(x)=$ 常数，可知弯矩 $M(x)$ 为 x 的一次函数，故该段弯矩图为一条斜率为 F_S 的斜直线。斜直线的倾斜方向由剪力正负确定：

① 当 $F_S(x)=$ 常数 >0 时，弯矩图为一条下斜直线(\)。

② 当 $F_S(x)=$ 常数 <0 时，弯矩图为一条上斜直线(/)。

③ 当 $F_S(x)=$ 常数 $=0$ 时，弯矩图为一条水平直线(—)。

(2) 梁上均布荷载作用的区段

由 $q(x)=$ 常数，即 $\dfrac{\mathrm{d}F_S(x)}{\mathrm{d}x}=q(x)=$ 常数可知，剪力 $F_S(x)$ 为 x 的一次函数，故该段剪力图为一条斜率为 q 的斜直线。又由 $\dfrac{\mathrm{d}^2M(x)}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}F_S(x)}{\mathrm{d}x}=q(x)=$ 常数可知，弯矩 $M(x)$ 为 x 的二次函数，故该段弯矩图为二次抛物线。

① 当 $q(x)=$ 常数 >0(均布荷载向上)时，剪力图为一条上斜直线(/)，弯矩图为上凸的二

次抛物线(⌒)。

② 当 $q(x)=$ 常数 <0（均布荷载向下）时，剪力图为一条下斜直线(\)，弯矩图为下凸的二次抛物线(⌣)。

(3) 弯矩的极值

由 $\dfrac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x}=F_S(x)=0$ 可知，在剪力等于零的截面上，$M(x)$ 具有极值；反过来，在弯矩具有极值的截面上，剪力一定等于零。

(4)集中力作用处

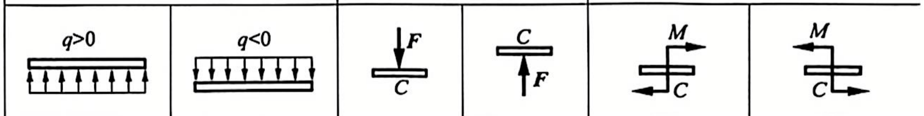
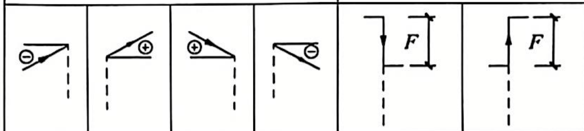
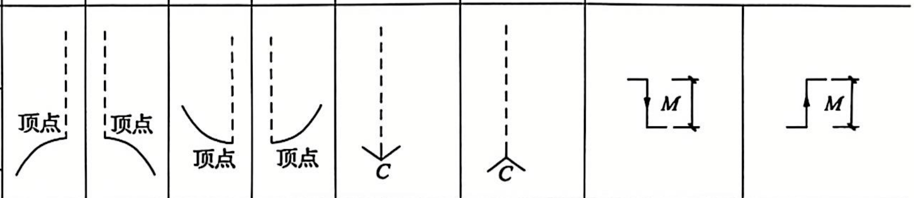
在集中力作用的左、右两侧面，剪力图有突变，突变值就等于该集中力值；弯矩值没有变化，但弯矩图的斜率会有突变，即弯矩图发生转折。

(5)集中力偶作用处

在集中力偶作用的左、右两侧面，剪力没有变化，但是弯矩图有突变，突变值等于该集中力偶矩值。

上述规律如表 6-1 所示。

表 6-1　剪力图和弯矩图的规律

<table>
<tr><td rowspan="2">荷载类型</td><td colspan="2" rowspan="2">无荷载段
$q(x)=0$</td><td>均布荷载段 $q(x)=$常数</td><td>集中力</td><td>集中力偶</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td rowspan="2">F_S 图</td><td colspan="2" rowspan="2">水平直线</td><td>斜直线</td><td>产生突变</td><td rowspan="2">无影响</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td rowspan="3">M 图</td><td>$F_S>0$</td><td>斜直线</td><td colspan="3" rowspan="3"></td></tr>
<tr><td>$F_S=0$</td><td>水平线</td></tr>
<tr><td>$F_S<0$</td><td>斜直线</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td>二次抛物线，$F_S=0$ 处有极值</td><td>在 C 处有转折</td><td>在 C 处产生突变</td></tr>
</table>

根据梁上荷载作用的情况，利用上述规律就可以判断各区段梁剪力图和弯矩图的形状。因此，只要计算出各控制截面（梁的端点，集中力的作用点，集中力偶的作用点，分布荷载的起、止点及内力的极值点所在的截面）的剪力和弯矩值，就可以快速、准确地画出梁的剪力图和弯矩图，而不必列出内力方程。这种方法一般称为控制截面法，或称简易法。

【例 6-7】 简支梁 AB 如图 6-25(a)所示，已知 $M=20\ \mathrm{kN\cdot m}$，$q=5\ \mathrm{kN/m}$，$F=10\ \mathrm{kN}$，试利用简易法画出梁的剪力图和弯矩图。

解　(1)求支座反力

$$F_{Ay}=15\ \mathrm{kN},\quad F_{By}=15\ \mathrm{kN}$$

(2) 根据梁上的外力将梁分为 AC、CD、DB 三区段。

(3) 分段画剪力图

AC、CD、DB 区段上梁的起点和终点的剪力为

A 右侧截面：$F_{SA}^{R}=15\ \mathrm{kN}$

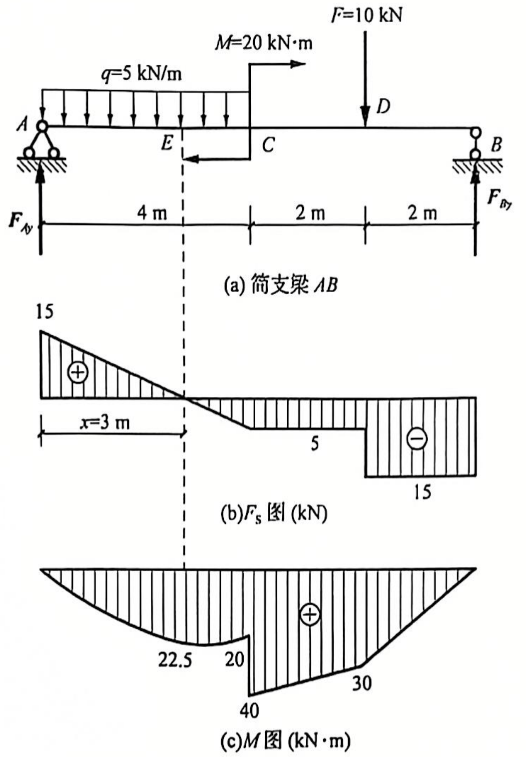


图 6-25　例 6-7 图

C 左、右两侧截面：$F_{SC}^{L}=F_{SC}^{R}=15-5\times4=-5\ \mathrm{kN}$

D 左、右两侧截面：$F_{SD}^{L}=-5\ \mathrm{kN}$，　$F_{SD}^{R}=15-5\times4-10=-15\ \mathrm{kN}$

B 左侧截面：$F_{SB}^{L}=-15\ \mathrm{kN}$

由于 AC 区段梁上有向下的均布荷载，剪力图为下斜直线，CD、DB 区段梁上无分布荷载作用，故这两段梁的剪力图为负的水平直线。梁的剪力图如图 6-25(b) 所示。

(4) 分段画弯矩图

AC、CD、DB 区段上梁的起点和终点的弯矩为

A 右侧截面：$M_A^R=0$

C 左、右两侧截面：$M_C^L=15\times4-5\times4\times2=20\ \mathrm{kN\cdot m}$

$M_C^R=15\times4-5\times4\times2+20=40\ \mathrm{kN\cdot m}$

D 左、右两侧截面：$M_D^L=M_D^R=15\times2=30\ \mathrm{kN\cdot m}$

B 左侧截面：$M_B^L=0$

在剪力 $F_S=0$ 的截面上弯矩取极值，设剪力为零的截面 E 距支座 A 的距离为 x，则

$$F_S=F_{Ay}-qx=0\ ,\qquad x=\frac{F_{Ay}}{q}=\frac{15}{5}=3\ \mathrm{m}$$

$$M=F_{Ay}\times3-q\times3\times\frac{3}{2}=15\times3-5\times3\times\frac{3}{2}=22.5\ \mathrm{kN\cdot m}$$

由于 AC 区段梁上有向下的均布荷载，弯矩图为下凸的二次抛物线，CD、DB 区段梁上无分布荷载作用，剪力图为负的水平线，故这两段梁的弯矩图为上斜直线。梁的弯矩图如图 6-25(c) 所示。

【例 6-8】　用简易法画出如图 6-26(a) 所示外伸梁的剪力图和弯矩图。

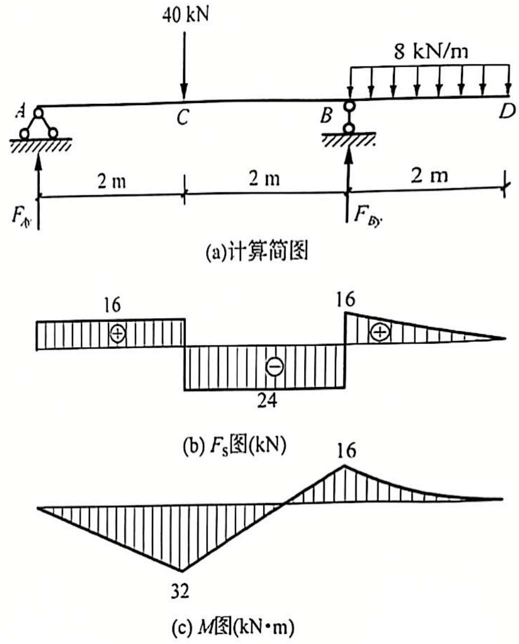


图 6-26　例 6-8 图

解　(1) 求支座反力

$$F_{Ay} = 16\ \text{kN},\quad F_{By} = 40\ \text{kN}$$

(2) 分段画剪力图

AC 段为无荷载区段，其内各截面的剪力为 $F_{SAC} = F_{Ay} = 16$ kN。可见，AC 段剪力图是一条正的水平线。

CB 段也是无荷载区段，其内各截面的剪力为 $F_{SCB} = F_{Ay} - 40 = -24$ kN。因此，CD 段剪力图是一条负的水平线。

BD 段为均布荷载区段，剪力图是一条斜直线，需计算出该段两端控制截面的剪力来确定图形

$$F_{SB}^{R} = 8 \times 2 = 16\ \text{kN},\quad F_{SD}^{L} = 0$$

梁的剪力图如图 6-26(b) 所示。

(3) 分段画弯矩图

AC 段为无荷载区段，剪力图为一条正的水平线，则弯矩图从左往右是一条下斜直线，需计算该段两端控制截面的弯矩来确定弯矩图形

$$M_A = 0,\quad M_C = 16 \times 2 = 32\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

CB 段为无荷载区段，剪力图是一条负的水平线，则弯矩图从左往右是一条上斜直线，该段两端控制截面的弯矩为

$$M_C = 32\ \text{kN} \cdot \text{m},\quad M_B = -8 \times 2 \times 1 = -16\ \text{kN} \cdot \text{m}$$

BD 区段梁上有向下的均布荷载，弯矩图是一条下凸的抛物线。由剪力图可知，该段弯矩图无极值，计算出两端控制截面的弯矩，即可确定出该段的弯矩图

$$M_B = -16\ \text{kN} \cdot \text{m},\quad M_D = 0$$

梁的弯矩图如图 6-26(c) 所示。

6.7　叠加法画梁的内力图

1. 简支梁内力图的叠加

梁在小变形的情况下，其支座反力、内力、应力和变形等参数均与外荷载呈线性关系，这种情况下，当梁上有几个荷载共同作用时，由每一个荷载所引起的某一参数将不受其他荷载的影响。因此，梁在多个荷载共同作用时所引起的某一参数等于各个荷载单独时所引起的该参数值的代数和，这种关系称为叠加原理。

根据叠加原理绘制内力图的方法称为叠加法。所谓叠加是将同一截面上的内力纵坐标的代数值相加，而不是图形的简单拼合。

【例 6-9】　试用叠加法绘制简支梁的剪力图和弯矩图。

解　如图 6-27(a) 所示，简支梁 AB 上的荷载是由均布荷载 q 和跨中的集中荷载 F 组合而成，分别画出梁在均布荷载 q 和跨中的集中荷载 F 单独作用下的剪力图和弯矩图，将对应图